Devoir de Maths N°1 TA1

EXERCICE

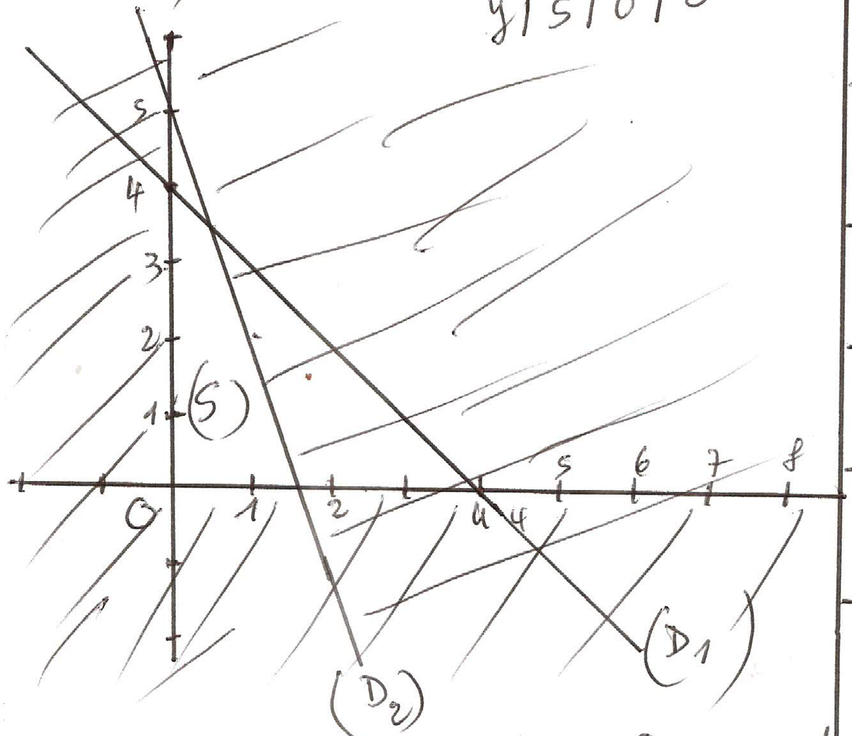
Partie A : Figure N°1

(D_1) $x+y=4$

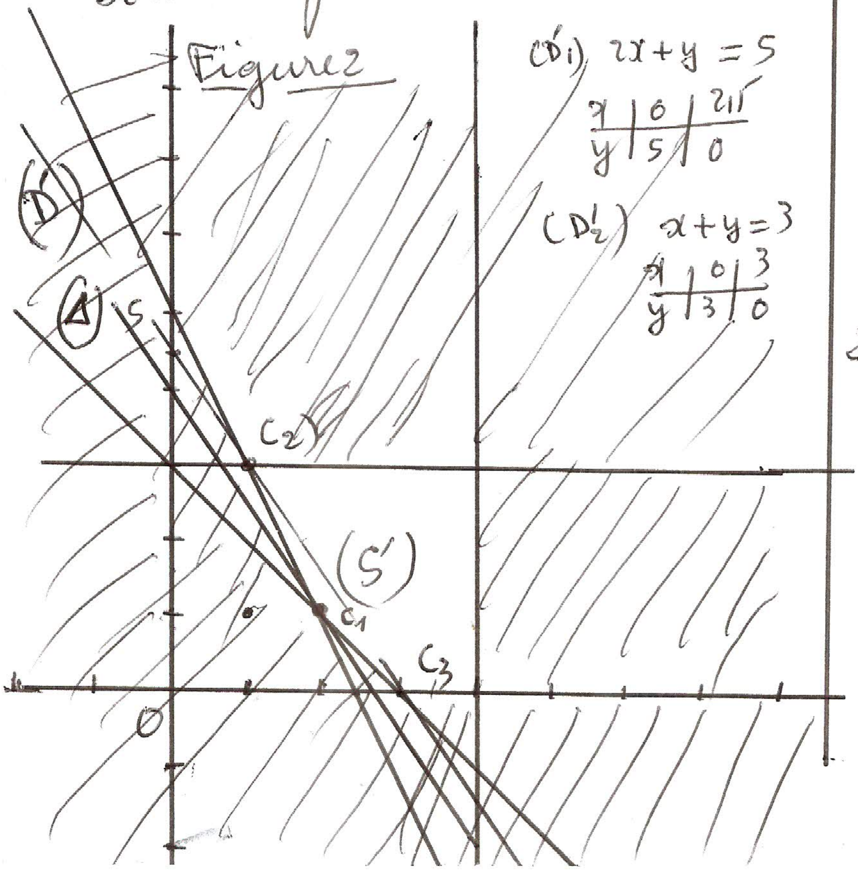
x	0	4
y	4	0

(D_2) $3x+y=5$

x	0	$\frac{5}{3}$	1
y	5	0	2



La partie non hachurée représente l'ensemble des solutions de (S), bords compris.



(D'_1) $2x+y=5$

x	0	2,5
y	5	0

(D'_2) $x+y=3$

x	0	3
y	3	0

La partie non hachurée représente l'ensemble des solutions de (S'), bords compris.

Partie B

1° Tableau des données.

	Type A x	Type B y	contrainte
Passagers	$20x$	$10y$	50
bagages	$100x$	$100y$	300
contraintes	4	3	
coût	$15x$	$10y$	

D'après le tableau des données on a :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 3 \\ 20x+10y \geq 50 \\ 100x+100y \geq 300 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 3 \\ x+y \geq 5 \\ x+y \geq 3 \end{cases}$$

c'est le système (S') qui est le système des contraintes de ce problème.

2° a) Fonction économique coût.

$$\boxed{C = 15x+10y}$$

b) Le point $C_1(2;1) \in (S')$ donc on peut louer 2 avions de type A et 1 avion de type B. Le coût de location est $C'_1 = 15\times2+10\times1 = 40$ millions.

(2)

c) pour $c = 45$ millions on a

$45 = 15x + 10y$ ou $9 = 3x + 2y$

Soit (D') $3x+2y=9$

x	0	3	1
y	4,5	0	3

oui car la droite (D') passe par le point $C_2(1;3)$ qui est dans la zone solution, ce qui fait 1 avion de type A et 3 avions de type B.

R: Le point $C_3(3;0)$ aussi est un choix qui correspond à 3 avions de type A à 45 millions

3° La droite (Δ) d'ordonnée à l'origine minimale qui minimise les coûts passe par le point $C_1(2;1)$ ce qui fait 2 avions de type A et un avion de type B pour un coût de 40 millions de francs cfa.

Problème

$$f(x) = \frac{-x^2+5x-4}{x}$$

1° a) $D_f = \mathbb{R}-\{0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} -x^2+5x-4 = -4\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} x = 0 \quad (x<0)\end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$ car $\left|\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x = 0 \quad (x>0)\right.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$

b) pour $x\neq 0$ on a :

$f(x) = -\frac{x^2}{x} + \frac{5x}{x} - \frac{4}{x} = -x+5-\frac{4}{x}$

Remarque : on peut aussi écrire

$-x+5-\frac{4}{x} = \frac{-x^2+5x-4}{x} = f(x)$ donc

$f(x) = -x+5-\frac{4}{x}$

c) $f(x)-(-x+5) = -\frac{4}{x}$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{4}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{4}{x}$ donc la droite (D) $y=-x+5$ est une asymptote oblique à (C).

d) $f(x)-(-x+5) = -\frac{4}{x} > 0$ si $x<0$ et $-\frac{4}{x} < 0$ si $x>0$ donc

(C) au dessus de (D) sur $]-\infty;0[$

et (C) au dessous de (D) sur $]0;+\infty[$.

e) La droite d'équation $x=0$ ou l'axe des ordonnées est la deuxième asymptote.

2°) a) f est dérivable sur D_f et

$f'(x) = -1+\frac{4}{x^2} = \frac{-x^2+4}{x^2} = \frac{4-x^2}{x^2}$

et $\boxed{f'(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{x^2}}$

b)

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

sur $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ $f'<0$

sur $]-2;0[\cup]0;2[$ $f'>0$

sur $\{-2;2\}$ $f'=0$

c) • f est décroissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]2;+\infty[$

• f est croissante sur $[-2;0[$ et $]0;2]$.

<u>Tableau de variation</u> de f

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow$ $+\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3°a) $(C) \cap (OI)$ $\begin{cases} y=0 \\ y=f(x) \end{cases}$

$f(x)=0 \iff -x^2+5x-4=0 \iff (4-x)(x-1)=0$

$x=1$ ou $x=4$ et on a

$M(1;0)$ et $N(4;0)$ avec

$(C) \cap (OI) = \{M;N\}$

b) Determinons les tangentes en $M(1;0)$ et $N(4;0)$.

$f(1)=0$; $f(4)=0$; $f'(1)=3$ et $f'(4)=-\frac{3}{4}$

(T_1) $y=3x-3$

(T_2) $y=-\frac{3}{4}x+3$

c) $(T_1) \cap (T_2) = \{A\}$

$3x-3=-\frac{3}{4}x+3$

$12x-12=-3x+12$

$15x=24$

$x=\frac{24}{15}=\frac{8}{5}$ et $A\begin{pmatrix}\frac{8}{5} \\ \frac{9}{5}\end{pmatrix}$.

$y=\frac{9}{5}$